

فصل ۱ : مشتق

تعریف، خواص و قضایای اساسی

نسخه مصور آموزشی با اثبات‌های کامل

مجید کوکبی

۶ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۷	۱ مشتق: تعریف، خواص و قضایای اساسی
۷	۱.۱ درآمد تاریخی و انگیزه
۸	۲.۱ تعریف مشتق
۸	۱.۲.۱ تعریف ۱.۲.۱ (مشتق در یک نقطه)
۸	۲.۲.۱ بحث تفصیلی روی تعریف
۸	۳.۲.۱ تعریف ۲.۲.۱ (تابع مشتق پذیر)
۸	۴.۲.۱ تعریف ۳.۲.۱ (مشتق یک طرفه)
۹	۵.۲.۱ قضیه ۴.۲.۱ (رابطه مشتق دو طرفه و یک طرفه)
۱۰	۳.۱ تفسیر هندسی مشتق
۱۰	۱.۳.۱ تعریف ۱.۳.۱ (خط قاطع و شیب آن)
۱۰	۲.۳.۱ تفسیر
۱۱	۳.۳.۱ معادله خط نرمال
۱۱	۴.۱ تفسیر فیزیکی مشتق
۱۱	۵.۱ مشتق پذیری و پیوستگی
۱۱	۱.۵.۱ قضیه ۱.۵.۱ (مشتق پذیری نتیجه می دهد پیوستگی)
۱۲	۲.۵.۱ بحث تفصیلی: چرا عکس قضیه برقرار نیست؟
۱۲	۳.۵.۱ مثال ۲.۵.۱ (تابع قدر مطلق)
۱۲	۴.۵.۱ مثال ۳.۵.۱ (تابع $x \sin(1/x)$)
۱۳	۵.۵.۱ مثال ۴.۵.۱ (تابع $x^2 \sin(1/x)$)
۱۳	۶.۵.۱ نتیجه گیری مهم
۱۴	۶.۱ خواص جبری مشتق
۱۴	۱.۶.۱ قضیه ۱.۶.۱ (خطی بودن مشتق)
۱۵	۲.۶.۱ قضیه ۲.۶.۱ (قاعده حاصل ضرب)
۱۶	۳.۶.۱ قضیه ۳.۶.۱ (قاعده تقسیم)
۱۶	۷.۱ قاعده زنجیره ای
۱۶	۱.۷.۱ قضیه ۱.۷.۱ (قاعده زنجیره ای)
۱۷	۸.۱ مشتق تابع معکوس
۱۷	۱.۸.۱ قضیه ۱.۸.۱ (مشتق تابع معکوس)

۱۹	۲.۸.۱	مثال ۲.۸.۱	۱۹
۱۹	۹.۱	مشتق توابع مقدماتی	۱۹
۱۹	۱.۹.۱	قضیه ۱.۹.۱ (مشتق تابع ثابت)	۱۹
۲۰	۲.۹.۱	قضیه ۲.۹.۱ (مشتق تابع همانی)	۲۰
۲۰	۳.۹.۱	قضیه ۳.۹.۱ (مشتق توان)	۲۰
۲۰	۴.۹.۱	قضیه ۴.۹.۱ (مشتق چندجمله‌ای)	۲۰
۲۰	۵.۹.۱	قضیه ۵.۹.۱ (مشتق تابع نمایی)	۲۰
۲۱	۶.۹.۱	قضیه ۶.۹.۱ (مشتق لگاریتم طبیعی)	۲۱
۲۱	۷.۹.۱	قضیه ۷.۹.۱ (مشتق توابع مثلثاتی)	۲۱
۲۲	۸.۹.۱	قضیه ۸.۹.۱ (مشتق توابع مثلثاتی معکوس)	۲۲
۲۲	۱۰.۱	مشتق‌های مرتبه بالاتر	۲۲
۲۲	۱.۱۰.۱	تعریف ۱.۱۰.۱	۲۲
۲۳	۲.۱۰.۱	مثال ۲.۱۰.۱	۲۳
۲۳	۳.۱۰.۱	قضیه ۳.۱۰.۱ (قاعده لایب‌نیتس)	۲۳
۲۴	۱۱.۱	قضیه رول	۲۴
۲۴	۱.۱۱.۱	قضیه ۱.۱۱.۱ (فرما)	۲۴
۲۴	۲.۱۱.۱	قضیه ۲.۱۱.۱ (رول)	۲۴
۲۵	۳.۱۱.۱	بحث تفصیلی روی قضیه رول	۲۵
۲۶	۱۲.۱	قضیه مقدار میانگین (لاگرانژ)	۲۶
۲۶	۱.۱۲.۱	قضیه ۱.۱۲.۱ (مقدار میانگین)	۲۶
۲۷	۲.۱۲.۱	بحث تفصیلی روی قضیه مقدار میانگین	۲۷
۲۸	۳.۱۲.۱	قضیه ۳.۱۲.۱ (MVT) (کوشی)	۲۸
۲۹	۱۳.۱	کاربردهای قضیه مقدار میانگین	۲۹
۲۹	۱.۱۳.۱	نتیجه ۱.۱۳.۱ (تابع با مشتق صفر)	۲۹
۲۹	۲.۱۳.۱	نتیجه ۲.۱۳.۱ (تفاضل ثابت)	۲۹
۲۹	۳.۱۳.۱	قضیه ۳.۱۳.۱ (تست یکنوایی)	۲۹
۳۰	۴.۱۳.۱	قضیه ۴.۱۳.۱ (یکتایی ریشه)	۳۰
۳۰	۵.۱۳.۱	قضیه ۵.۱۳.۱ (نامساوی‌ها از MVT)	۳۰
۳۱	۱۴.۱	قضیه داربو (خاصیت مقدار میانی مشتق)	۳۱
۳۱	۱.۱۴.۱	قضیه ۱.۱۴.۱ (داربو)	۳۱
۳۳	۲.۱۴.۱	نتیجه ۲.۱۴.۱ (علامت ثابت مشتق)	۳۳
۳۳	۳.۱۴.۱	نتیجه ۳.۱۴.۱ (عدم پرش مشتق)	۳۳
۳۴	۴.۱۴.۱	مثال ۴.۱۴.۱ (تابع با مشتق ناپیوسته)	۳۴
۳۴	۱۵.۱	قاعده هوییتال	۳۴
۳۴	۱.۱۵.۱	قضیه ۱.۱۵.۱ (هوییتال — فرم $\frac{0}{0}$)	۳۴
۳۵	۲.۱۵.۱	قضیه ۲.۱۵.۱ (هوییتال — فرم $\frac{\infty}{\infty}$)	۳۵
۳۶	۳.۱۵.۱	بحث تفصیلی روی قاعده هوییتال	۳۶

۳۸	۱۶.۱ قضیه تیلور
۳۸	۱.۱۶.۱ قضیه ۱.۱۶.۱ (تیلور با باقیمانده لاگرانژ)
۳۹	۲.۱۶.۱ قضیه ۲.۱۶.۱ (تیلور با باقیمانده کوشی)
۴۱	۳.۱۶.۱ قضیه ۳.۱۶.۱ (تیلور با باقیمانده انتگرالی)
۴۳	۴.۱۶.۱ قضیه ۴.۱۶.۱ (بسطهای مهم تیلور)
۴۴	۱۷.۱ مشتق توابع برداری
۴۴	۱.۱۷.۱ تعریف ۱.۱۷.۱
۴۴	۲.۱۷.۱ قضیه ۲.۱۷.۱
۴۵	۳.۱۷.۱ قضیه ۳.۱۷.۱ (خواص مشتق برداری)
۴۵	۴.۱۷.۱ قضیه ۴.۱۷.۱ (MVT برداری)
۴۶	۵.۱۷.۱ ملاحظه ۵.۱۷.۱ (تفاوت با MVT اسکالر)
۴۶	۱۸.۱ خلاصه فصل

فهرست تصاویر

- ۱.۱ خط زمانی تحول تاریخی مفهوم مشتق از مسئله‌های هندسی قرن هفدهم تا صورت‌بندی دقیق حدی در قرن نوزدهم. ۷
- ۲.۱ وقتی $h \rightarrow 0$ ، خط قاطع (قرمز) به خط مماس (سبز) میل می‌کند و شیب آن به $f'(x_0)$ همگرا می‌شود. . ۹
- ۳.۱ تابع $|x|$ در صفر: $f'_+(0) = 1$ و $f'_-(0) = -1$. نابرابری دو مشتق یک‌طرفه یعنی مشتق دو‌طرفه وجود ندارد. ۹
- ۴.۱ رابطه یک‌طرفه بین مشتق‌پذیری و پیوستگی. عکس قضیه با مثال‌های نقض رد می‌شود. ۱۲
- ۵.۱ سه رفتار متفاوت پیوستگی بدون مشتق‌پذیری «خوش‌رفتار»: گوشه‌دار، نوسانی، و مشتق ناپیوسته اما موجود. ۱۳
- ۶.۱ درخت خواص جبری مشتق: خطی بودن، قاعده حاصل ضرب و قاعده تقسیم. ۱۴
- ۷.۱ قاعده زنجیره‌ای: مشتق ترکیب، حاصل ضرب مشتق‌ها در نقاط متناظر است. ۱۸
- ۸.۱ نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ متقارن‌اند. مشتق‌ها در نقاط متناظر، معکوس یکدیگرند: $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$ ۱۹
- ۹.۱ جدول مرجع مشتق توابع مقدماتی — جمع‌بندی قضایای بخش ۹.۱. ۱۹
- ۱۰.۱ توالی مشتق‌های مرتبه بالاتر با تعریف بازگشتی $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ ۲۳
- ۱۱.۱ قضیه فرما: در نقطه اکسترمم نسبی داخلی که f در آن مشتق‌پذیر است، مماس افقی است و $f'(c) = 0$. ۲۵
- ۱۲.۱ قضیه رول: اگر $f(a) = f(b)$ و شرایط پیوستگی/مشتق‌پذیری برقرار باشد، نقطه‌ای چون c با مماس افقی وجود دارد. ۲۶
- ۱۳.۱ هر سه شرط قضیه رول لازم‌اند: با حذف هر یک، نتیجه (وجود c با $f'(c) = 0$) نقض می‌شود. ۲۶
- ۱۴.۱ قضیه مقدار میانگین: نقطه‌ای چون c وجود دارد که مماس در آن موازی خط قاطع است؛ $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ۲۷
- ۱۵.۱ MVT کوشی: نسبت مشتق‌ها در نقطه c با نسبت تغییرات کل دو تابع برابر است. ۲۹
- ۱۶.۱ تست یکنوایی: علامت f' روی هر بازه، رفتار صعودی/نزولی f را تعیین می‌کند. ۳۰
- ۱۷.۱ تفسیر هندسی نامساوی $\ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{b}$: مماس در نقطه میانی، بین شیب‌های دو سر بازه محصور است. ۳۲
- ۱۸.۱ قضیه داربو: مشتق هر مقدار بین $f'(a)$ و $f'(b)$ را اختیار می‌کند، هر چند f' ممکن است پیوسته نباشد. . ۳۳
- ۱۹.۱ فلوجارت قاعده هوییتال: ابتدا بررسی فرم نامعین، سپس محاسبه حد نسبت مشتق‌ها. ۳۷
- ۲۰.۱ تقریب تیلور $\sin x$ با چندجمله‌ای‌های درجه ۱، ۳ و ۵: با افزایش درجه، تقریب در بازه وسیع‌تری دقیق می‌شود. ۴۲
- ۲۱.۱ مقایسه سه فرم باقیمانده تیلور از نظر فرمول و کاربرد. ۴۳
- ۲۲.۱ جدول مرجع بسط‌های مهم تیلور/مکلورین با بازه همگرایی. ۴۴

۲۳.۱ در حالت اسکالر، نقطه c با برابری مشتق و شیب قاطع وجود دارد. در حالت برداری، تنها نامساوی برقرار است؛ دایره واحد نشان می‌دهد r' هرگز صفر نمی‌شود. ۴۷

فصل ۱

مشتق: تعریف، خواص و قضایای اساسی

۱.۱ درآمد تاریخی و انگیزه

مفهوم مشتق یکی از دو مفهوم بنیادی آنالیز ریاضی است (مفهوم دیگر، انتگرال است). ریشه‌های این مفهوم به مسائل هندسی و فیزیکی قرن هفدهم بازمی‌گردد:

- **مسئله مماس:** چگونه می‌توان خط مماس بر یک منحنی را در یک نقطه پیدا کرد؟ این مسئله توسط ریاضیدانانی مانند فرما، دکارت و بارو مورد مطالعه قرار گرفت.
- **مسئله سرعت:** چگونه می‌توان سرعت لحظه‌ای یک جسم متحرک را تعریف کرد؟ این مسئله توسط نیوتن و لایبنیتس به طور مستقل حل شد.

هر دو مسئله به یک مفهوم ریاضی یکسان منتهی می‌شوند: **حد نسبت تغییرات**. این حد را «مشتق» می‌نامیم. نیوتن و لایبنیتس در قرن هفدهم حساب دیفرانسیل و انتگرال را به طور مستقل بنیان گذاشتند. اما تعریف دقیق مشتق بر پایه مفهوم حد، توسط ریاضیدانانی مانند کوشی و وایرستراس در قرن نوزدهم صورت‌بندی شد. تعریفی که امروزه در آنالیز ریاضی به کار می‌بریم، همان تعریف کوشی است. همان‌طور که در شکل ۱.۱ مشاهده می‌شود، این مسیر تاریخی حدود دو قرن و نیم به طول انجامید.



شکل ۱.۱: خط زمانی تحول تاریخی مفهوم مشتق از مسئله‌های هندسی قرن هفدهم تا صورت‌بندی دقیق حدی در قرن نوزدهم.

نکته طنز

مشتق مثل سرعت‌سنج ماشین است: در هر لحظه می‌گوید با چه سرعتی حرکت می‌کنی. انتگرال مثل کیلومترشمار است: می‌گوید چقدر راه رفته‌ای.

۲.۱ تعریف مشتق

۱.۲.۱ تعریف ۱.۲.۱ (مشتق در یک نقطه)

فرض کنید f تابعی حقیقی مقدار باشد که روی بازه‌ای باز مانند I تعریف شده است و $x_0 \in I$. می‌گوییم f در نقطه x_0 مشتق‌پذیر است اگر حد زیر موجود باشد:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

در این صورت، این حد را مشتق f در x_0 می‌نامیم و با نمادهای زیر نشان می‌دهیم:

$$f'(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad Df(x_0).$$

۲.۲.۱ بحث تفصیلی روی تعریف

۱. چرا x_0 باید نقطه داخلی باشد؟

تعریف مشتق بر پایه حد دوطرفه است. برای اینکه حد دوطرفه معنا داشته باشد، باید تابع در همسایگی چپ و راست x_0 تعریف شده باشد. اگر x_0 نقطه انتهایی بازه باشد، فقط یکی از دو حد یک‌طرفه معنا دارد و مشتق دوطرفه وجود ندارد. به همین دلیل، در تعریف مشتق، x_0 را نقطه داخلی بازه I می‌گیریم.

۲. چرا $h \rightarrow 0$ و نه $h \rightarrow 0^+$ ؟

چون می‌خواهیم مشتق در نقطه، مستقل از جهت نزدیک شدن باشد. اگر فقط از یک طرف نزدیک شویم، به مفهوم مشتق یک‌طرفه می‌رسیم که بعداً تعریف می‌کنیم.

۳. چرا $h \neq 0$ ؟

نسبت $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ در $h = 0$ تعریف نشده است (تقسیم بر صفر). اما حد، رفتار تابع را وقتی h به صفر نزدیک می‌شود (ولی هرگز برابر صفر نمی‌شود) بررسی می‌کند.

۴. چرا مشتق یک «حد» است؟

مفهوم مشتق بر پایه مفهوم حد بنا شده است. حد، رفتار تابع را در نزدیکی یک نقطه توصیف می‌کند. مشتق نیز نرخ تغییر لحظه‌ای تابع را در نزدیکی x_0 توصیف می‌کند. همان‌طور که در شکل ۲.۱ مشاهده می‌شود، این حد برابر شیب خط مماس بر منحنی در نقطه $(x_0, f(x_0))$ است.

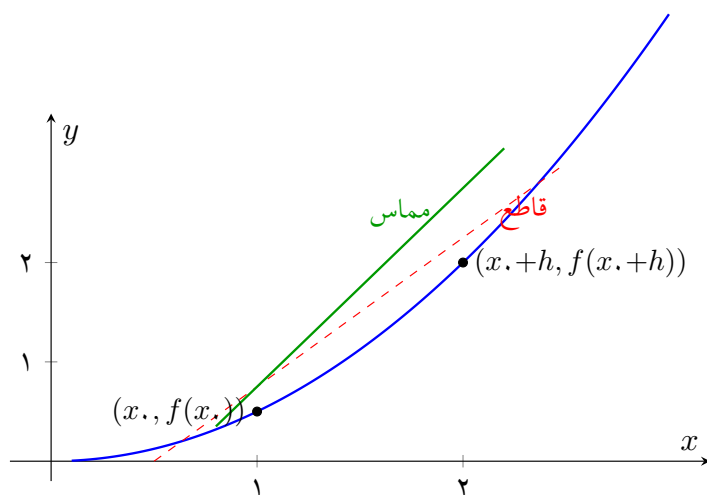
۳.۲.۱ تعریف ۲.۲.۱ (تابع مشتق‌پذیر)

فرض کنید f روی بازه باز I تعریف شده باشد. می‌گوییم f روی I مشتق‌پذیر است اگر در هر نقطه $x \in I$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت، تابع $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ را که به هر x مقدار $f'(x)$ را نسبت می‌دهد، تابع مشتق یا مشتق f می‌نامیم.

۴.۲.۱ تعریف ۳.۲.۱ (مشتق یک‌طرفه)

مشتق راست f در x_0 :

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

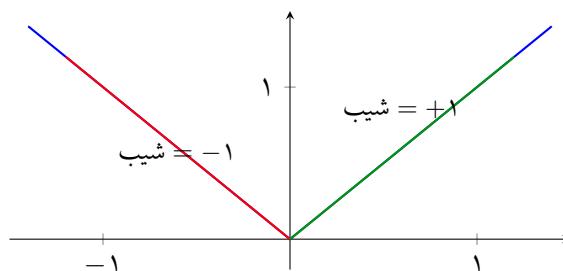


شکل ۲.۱: وقتی $h \rightarrow 0$ ، خط قاطع (قرمز) به خط مماس (سبز) میل می‌کند و شیب آن به $f'(x_0)$ همگرا می‌شود.

مشتق چپ f در x_0 :

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

همان‌طور که در شکل ۳.۱ دیده می‌شود، در نقطه گوشه‌دار دو مشتق یک‌طرفه نابرابرند و لذا مشتق دوطرفه وجود ندارد.



شکل ۳.۱: تابع $|x|$ در صفر: $f'_+(0) = 1$ و $f'_-(0) = -1$. نابرابری دو مشتق یک‌طرفه یعنی مشتق دوطرفه وجود ندارد.

۵.۲.۱ قضیه ۴.۲.۱ (رابطه مشتق دوطرفه و یک‌طرفه)

بیان: f در x_0 مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر هم $f'_+(x_0)$ و هم $f'_-(x_0)$ موجود و برابر باشند. در این صورت:

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

اثبات:

($\Rightarrow$) فرض کنید $f'(x_0)$ موجود است. طبق تعریف حد دوطرفه، برای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد $\delta > 0$ وجود دارد که برای هر h

با $0 < |h| < \delta$:

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

این نامساوی به طور خاص برای $0 < h < \delta$ (یعنی $h \rightarrow 0^+$) و برای $-\delta < h < 0$ (یعنی $h \rightarrow 0^-$) نیز برقرار

است. پس هر دو حد یکطرفه موجود و برابر $f'(x_0)$ هستند.

($\Leftrightarrow$) فرض کنید $L = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. یعنی:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L, \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L.$$

برای $\varepsilon > 0$ ، از حد راست، $\delta_1 > 0$ وجود دارد که برای $0 < h < \delta_1$:

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - L \right| < \varepsilon.$$

از حد چپ، $\delta_2 > 0$ وجود دارد که برای $-\delta_2 < h < 0$:

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - L \right| < \varepsilon.$$

قرار دهید $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. برای هر h با $0 < |h| < \delta$ ، اگر $h > 0$ باشد، نامساوی اول و اگر $h < 0$ باشد، نامساوی دوم برقرار است. پس در هر دو حالت:

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - L \right| < \varepsilon.$$

یعنی حد دوطرفه موجود و برابر L است. پس $f'(x_0) = L$. ■

۳.۱ تفسیر هندسی مشتق

۱.۳.۱ تعریف ۱.۳.۱ (خط قاطع و شیب آن)

فرض کنید f روی بازه I تعریف شده و $x_0, x_0 + h \in I$ با $h \neq 0$. **خط قاطع** منحنی $y = f(x)$ بین دو نقطه $(x_0, f(x_0))$ و $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ خطی است که از این دو نقطه می‌گذرد. شیب این خط قاطع برابر است با:

$$m_h = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

۲.۳.۱ تفسیر

وقتی $h \rightarrow 0$ ، نقطه $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ روی منحنی به نقطه $(x_0, f(x_0))$ نزدیک می‌شود. خط قاطع به یک خط حدی میل می‌کند که **خط مماس** بر منحنی در نقطه $(x_0, f(x_0))$ نامیده می‌شود. شیب این خط مماس، دقیقاً $f'(x_0)$ است. پس:

$$f'(x_0) = \text{شیب خط مماس بر منحنی } y = f(x) \text{ در نقطه } (x_0, f(x_0)).$$

اگر $f'(x_0)$ موجود و متناهی باشد، خط مماس معادله زیر را دارد:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

۳.۳.۱ معادله خط نرمال

خط نرمال بر منحنی در نقطه $(x_0, f(x_0))$ خطی است عمود بر خط مماس. اگر $f'(x_0) \neq 0$ ، شیب خط نرمال برابر $-\frac{1}{f'(x_0)}$ است و معادله آن:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

اگر $f'(x_0) = 0$ ، خط مماس افقی و خط نرمال عمودی است: $x = x_0$.

۴.۱ تفسیر فیزیکی مشتق

فرض کنید موقعیت یک ذره متحرک روی خط راست با تابع $s(t)$ توصیف شود، که در آن t زمان و $s(t)$ موقعیت ذره در زمان t است.

سرعت متوسط در بازه زمانی $[t_0, t_0 + h]$ برابر است با:

$$v_{\text{avg}} = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}.$$

سرعت لحظه‌ای در زمان t_0 برابر است با:

$$v(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} = s'(t_0).$$

پس مشتق تابع موقعیت نسبت به زمان، سرعت است. به طور مشابه، مشتق سرعت نسبت به زمان، شتاب است:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

این تفسیر فیزیکی، انگیزه اصلی نیوتن برای ابداع حساب دیفرانسیل بود.

۵.۱ مشتق‌پذیری و پیوستگی

۱.۵.۱ قضیه ۱.۵.۱ (مشتق‌پذیری نتیجه می‌دهد پیوستگی)

بیان: اگر f در x_0 مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در x_0 پیوسته است.

اثبات:

می‌خواهیم نشان دهیم $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ، یا به طور معادل $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$.

برای $x \neq x_0$ داریم:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0).$$

از فرض، f در x_0 مشتق‌پذیر است، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

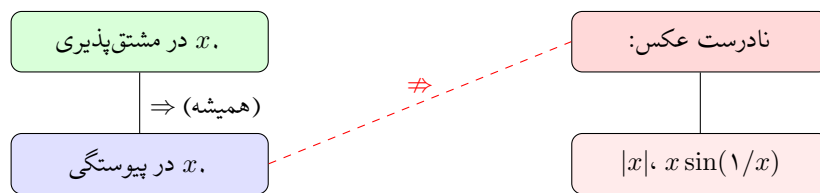
این حد موجود و متناهی است. همچنین $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$. طبق قضیه حد حاصل ضرب دو تابع (که هر دو حد دارند)، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

پس $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ و f در x_0 پیوسته است. ■

۲.۵.۱ بحث تفصیلی: چرا عکس قضیه برقرار نیست؟

عکس قضیه ۱.۵.۱ این است: «اگر f در x_0 پیوسته باشد، آنگاه f در x_0 مشتق پذیر است.» این گزاره نادرست است. همان طور که در شکل ۴.۱ دیده می شود، این رابطه یک طرفه است.



شکل ۴.۱: رابطه یک طرفه بین مشتق پذیری و پیوستگی. عکس قضیه با مثال های نقض رد می شود.

۳.۵.۱ مثال ۲.۵.۱ (تابع قدر مطلق)

تابع $f(x) = |x|$ را در نظر بگیرید. این تابع در $x_0 = 0$ پیوسته است، چون:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|.$$

اما در $x_0 = 0$ مشتق پذیر نیست. برای دیدن این، مشتق های یک طرفه را حساب می کنیم:

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

چون $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ ، طبق قضیه ۴.۲.۱، f در 0 مشتق پذیر نیست. ✓

۴.۵.۱ مثال ۳.۵.۱ (تابع $x \sin(1/x)$)

تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

این تابع در $x_0 = 0$ پیوسته است، چون:

$$|f(x) - f(\bullet)| = |x \sin(1/x)| \leq |x| \rightarrow \bullet.$$

اما در $x = \bullet$ مشتق‌پذیر نیست. برای دیدن این:

$$\frac{f(h) - f(\bullet)}{h} = \frac{h \sin(1/h)}{h} = \sin(1/h).$$

وقتی $h \rightarrow \bullet$ ، $\sin(1/h)$ نوسان می‌کند و حد ندارد. پس مشتق در $\bullet$ وجود ندارد. ✓

۵.۵.۱ مثال ۴.۵.۱ (تابع $x^\gamma \sin(1/x)$)

تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} x^\gamma \sin(1/x) & x \neq \bullet \\ \bullet & x = \bullet \end{cases}$$

این تابع در $x = \bullet$ پیوسته است. همچنین مشتق‌پذیر است:

$$f'(\bullet) = \lim_{h \rightarrow \bullet} \frac{h^\gamma \sin(1/h) - \bullet}{h} = \lim_{h \rightarrow \bullet} h \sin(1/h) = \bullet.$$

چون $|h \sin(1/h)| \leq |h| \rightarrow \bullet$ پس این تابع در صفر مشتق‌پذیر است. اما جالب است که f' در صفر ناپیوسته است. برای دیدن این، مشتق را برای $x \neq \bullet$ حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = \gamma x \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

وقتی $x \rightarrow \bullet$ ، جمله اول به $\bullet$ میل می‌کند، اما $\cos(1/x)$ نوسان می‌کند و حد ندارد. پس $\lim_{x \rightarrow \bullet} f'(x)$ وجود ندارد، در حالی که $f'(\bullet) = \bullet$. پس f' در صفر ناپیوسته است. ✓

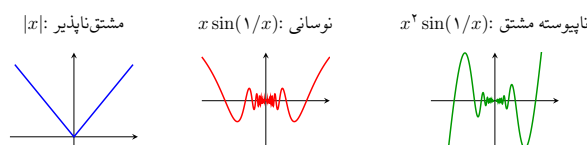
۶.۵.۱ نتیجه‌گیری مهم

مثال‌های بالا نشان می‌دهند:

۱. پیوستگی شرط لازم برای مشتق‌پذیری است، ولی شرط کافی نیست.

۲. مشتق یک تابع مشتق‌پذیر لزوماً پیوسته نیست (مثال ۴.۵.۱).

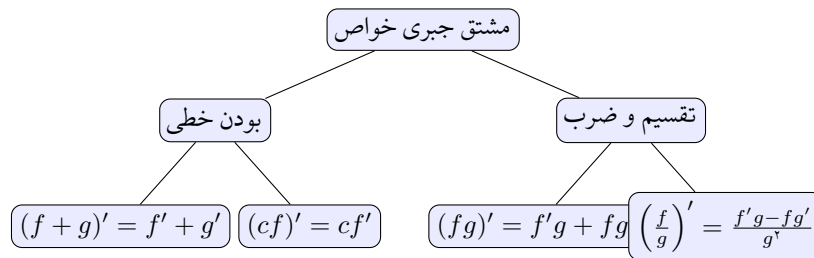
همان‌طور که در شکل ۵.۱ مشاهده می‌شود، سه تابع $|x|$ ، $x \sin(1/x)$ و $x^\gamma \sin(1/x)$ سه رفتار متفاوت پیوستگی بدون مشتق‌پذیری «خوش‌رفتار» را نشان می‌دهند.



شکل ۵.۱: سه رفتار متفاوت پیوستگی بدون مشتق‌پذیری «خوش‌رفتار»: گوشه‌دار، نوسانی، و مشتق ناپیوسته اما موجود.

۶.۱ خواص جبری مشتق

خواص اصلی مشتق در شکل ۶.۱ به صورت درختی جمع‌بندی شده‌اند.



شکل ۶.۱: درخت خواص جبری مشتق: خطی بودن، قاعده حاصل ضرب و قاعده تقسیم.

۱.۶.۱ قضیه ۱.۶.۱ (خطی بودن مشتق)

بیان: اگر f و g در x مشتق‌پذیر باشند و $c \in \mathbb{R}$ ، آنگاه:

$$۱. (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \text{ و } x \text{ مشتق‌پذیر است}$$

$$۲. (cf)'(x) = cf'(x) \text{ و } x \text{ مشتق‌پذیر است}$$

اثبات:

(۱) طبق تعریف:

$$(f + g)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h}.$$

با جایگذاری:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x + h) + g(x + h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x) + g(x + h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \right].$$

چون هر دو حد موجودند (طبق فرض مشتق‌پذیری)، طبق قضیه حد مجموع:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

(۲) طبق تعریف:

$$(cf)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x + h) - cf(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} c \cdot \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

طبق قضیه حد ضرب اسکالر:

$$= c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = cf'(x_0).$$

■

۲.۶.۱ قضیه ۲.۶.۱ (قاعده حاصل ضرب)

بیان: اگر f و g در x_0 مشتق پذیر باشند، آنگاه fg در x_0 مشتق پذیر است و:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

اثبات:

طبق تعریف:

$$(fg)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h}.$$

از اتحاد کمکی زیر استفاده می‌کنیم:

$$f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0) = [f(x_0 + h) - f(x_0)]g(x_0 + h) + f(x_0)[g(x_0 + h) - g(x_0)].$$

با جایگذاری:

$$(fg)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \right].$$

اکنون:

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \text{ موجود است.}$$

$$\bullet \text{ چون } g \text{ در } x_0 \text{ مشتق پذیر است، طبق قضیه ۱.۵.۱ در } x_0 \text{ پیوسته است، پس } \lim_{h \rightarrow 0} g(x_0 + h) = g(x_0).$$

$$\bullet f(x_0) \text{ ثابت است.}$$

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = g'(x_0) \text{ موجود است.}$$

طبق قضیه حد مجموع و ضرب:

$$= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

■

۳.۶.۱ قضیه ۳.۶.۱ (قاعده تقسیم)

بیان: اگر f و g در x مشتق پذیر باشند و $g(x) \neq 0$ ، آنگاه $\frac{f}{g}$ در x مشتق پذیر است و:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

اثبات:

ابتدا مشتق تابع $1/g$ را حساب می‌کنیم. داریم:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)}.$$

با تنظیم:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(x) - g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h)g(x)} \right] = -g'(x) \cdot \frac{1}{g(x)^2} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

(در اینجا از پیوستگی g در x و $g(x) \neq 0$ استفاده کردیم که نتیجه می‌دهد $g(x+h) \rightarrow g(x) \neq 0$). اکنون با قاعده حاصل ضرب روی $f \cdot (1/g)$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

■

۷.۱ قاعده زنجیره‌ای

۱.۷.۱ قضیه ۱.۷.۱ (قاعده زنجیره‌ای)

بیان: فرض کنید f در x مشتق پذیر و g در $f(x)$ مشتق پذیر باشد. آنگاه $f \circ g$ در x مشتق پذیر است و:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

اثبات (روش اول — با استفاده از تابع کمکی):

تابع کمکی u را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(f(x))}{y - f(x)} & y \neq f(x) \\ g'(f(x)) & y = f(x) \end{cases}$$

گام ۱: پیوستگی u در $f(x)$.

می‌خواهیم نشان دهیم $\lim_{y \rightarrow f(x)} u(y) = g'(f(x)) = u(f(x))$.

طبق تعریف مشتق g در $f(x)$:

$$\lim_{y \rightarrow f(x_0)} \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} = g'(f(x_0)).$$

پس برای $y \neq f(x_0)$ ، $u(y) \rightarrow g'(f(x_0))$ وقتی $y \rightarrow f(x_0)$ و $u(f(x_0)) = g'(f(x_0))$ پس u در $f(x_0)$ پیوسته است.

گام ۲: اتحاد کلیدی.

برای هر y (حتی $y = f(x_0)$):

$$g(y) - g(f(x_0)) = u(y) \cdot (y - f(x_0)).$$

بررسی:

• اگر $y \neq f(x_0)$: طبق تعریف u ، دو طرف برابرند.

• اگر $y = f(x_0)$: سمت چپ $g(f(x_0)) - g(f(x_0)) = 0$ و سمت راست $u(f(x_0)) \cdot 0 = 0$ پس برابرند.

گام ۳: جایگذاری $y = f(x)$

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = u(f(x)) \cdot (f(x) - f(x_0)).$$

برای $x \neq x_0$ ، تقسیم بر $x - x_0$:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = u(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

گام ۴: حد گرفتن.

• چون f در x_0 مشتق پذیر است، طبق قضیه ۱.۵.۱ در x_0 پیوسته است، پس $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

• چون u در $f(x_0)$ پیوسته است، $\lim_{x \rightarrow x_0} u(f(x)) = u(f(x_0)) = g'(f(x_0))$.

• $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

طبق قضیه حد ضرب:

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

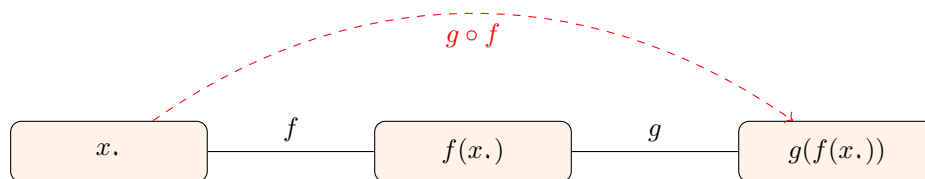
■

شکل ۷.۱ ساختار ترکیب توابع و رابطه مشتق‌ها را به صورت بصری نشان می‌دهد.

۸.۱ مشتق تابع معکوس

۱.۸.۱ قضیه ۱.۸.۱ (مشتق تابع معکوس)

بیان: فرض کنید f روی بازه باز I اکیداً یکنوا و پیوسته باشد، در $x_0 \in I$ مشتق پذیر با $f'(x_0) \neq 0$. فرض کنید $J = f(I)$ و $f^{-1}: J \rightarrow I$ تابع معکوس باشد. آنگاه f^{-1} در $y_0 = f(x_0)$ مشتق پذیر است و:



$$(g \circ f)'(x.) = g'(f(x.)) \cdot f'(x.)$$

شکل ۷.۱: قاعده زنجیره‌ای: مشتق ترکیب، حاصل ضرب مشتق‌ها در نقاط متناظر است.

$$(f^{-1})'(y.) = \frac{1}{f'(x.)}.$$

اثبات:

گام ۱: پیوستگی f^{-1} در $y.$

چون f روی I اکیداً یکنوا و پیوسته است، طبق قضیه پیوستگی تابع معکوس، f^{-1} روی J پیوسته است. به طور خاص، f^{-1} در $y.$ پیوسته است.

گام ۲: حد مورد نظر.

می‌خواهیم نشان دهیم:

$$\lim_{y \rightarrow y.} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y.)}{y - y.} = \frac{1}{f'(x.)}.$$

قرار دهید $x = f^{-1}(y)$ پس $y = f(x)$ و $x. = f^{-1}(y.)$ ، چون f اکیداً یکنواست، $x \neq x.$ داریم:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y.)}{y - y.} = \frac{x - x.}{f(x) - f(x.)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x.)}{x - x.}}.$$

گام ۳: حد گرفتن.

وقتی $y \rightarrow y.$ ، چون f^{-1} در $y.$ پیوسته است، $x = f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(y.) = x.$ همچنین $x \neq x.$ برای $y \neq y.$

پس:

$$\lim_{y \rightarrow y.} \frac{f(x) - f(x.)}{x - x.} = f'(x.).$$

چون $f'(x.) \neq 0$ ، طبق قضیه حد تقسیم:

$$\lim_{y \rightarrow y.} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y.)}{y - y.} = \frac{1}{f'(x.)}.$$

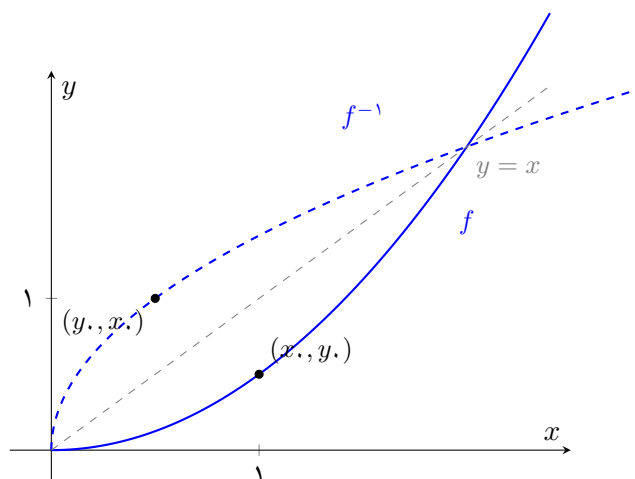
■

۲.۸.۱ مثال ۲.۸.۱

تابع $f(x) = x^3$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی و پیوسته است. $f'(x) = 3x^2$ در $x_0 = 1$ ، $f'(1) = 3 \neq 0$ پس $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ در $y_0 = 1$ مشتق پذیر است و:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}.$$

این با محاسبه مستقیم $\frac{d}{dy}y^{1/3} = \frac{1}{3}y^{-2/3}$ و جایگذاری $y = 1$ سازگار است. همان طور که در شکل ۸.۱ دیده می شود، این تقارن از تقارن نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ ناشی می شود.



شکل ۸.۱: نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ متقارن اند. مشتق ها در نقاط متناظر، معکوس یکدیگرند: $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$.

۹.۱ مشتق توابع مقدماتی

جدول مرجع مشتق توابع مقدماتی در شکل ۹.۱ آمده است.

$f'(x)$	تابع $f(x)$	$f'(x)$	تابع $f(x)$
$\cos x$	$\sin x$	0	c
$-\sin x$	$\cos x$	1	x
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	nx^{n-1}	x^n
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	e^x	e^x
$\sec^2 x$	$\tan x$	$\frac{1}{x}$	$\ln x$

شکل ۹.۱: جدول مرجع مشتق توابع مقدماتی — جمع بندی قضایای بخش ۹.۱.

۱.۹.۱ قضیه ۱.۹.۱ (مشتق تابع ثابت)

اگر $f(x) = c$ برای ثابت c ، آنگاه $f'(x) = 0$ برای همه x .

اثبات:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

■

۲.۹.۱ قضیه ۲.۹.۱ (مشتق تابع همانی)

اگر $f(x) = x$ ، آنگاه $f'(x) = 1$.

اثبات:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

■

۳.۹.۱ قضیه ۳.۹.۱ (مشتق توان)

اگر $f(x) = x^n$ برای $n \in \mathbb{N}$ ، آنگاه $f'(x) = nx^{n-1}$.

اثبات:

از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$(x+h)^n - x^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k.$$

با تقسیم بر h :

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} = nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \dots + h^{n-1}.$$

وقتی $h \rightarrow 0$ ، همه جملات به جز جمله اول به صفر میل می‌کنند. پس:

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

■

۴.۹.۱ قضیه ۴.۹.۱ (مشتق چندجمله‌ای)

اگر $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a$ ، آنگاه:

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1.$$

■ اثبات: از خطی بودن مشتق (قضیه ۱.۶.۱) و مشتق توان (قضیه ۳.۹.۱).

۵.۹.۱ قضیه ۵.۹.۱ (مشتق تابع نمایی)

تابع $f(x) = e^x$ در هر نقطه مشتق‌پذیر است و $f'(x) = e^x$.

اثبات:

از تعریف:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

باید نشان دهیم $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$. از بسط سری $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \dots$

$$\frac{e^h - 1}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots \rightarrow 1$$

وقتی $h \rightarrow 0$ پس $f'(x) = e^x$ ■

۶.۹.۱ قضیه ۶.۹.۱ (مشتق لگاریتم طبیعی)

تابع $f(x) = \ln x$ برای $x > 0$ مشتق پذیر است و $f'(x) = \frac{1}{x}$.

اثبات:

از تعریف:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}.$$

قرار دهید $u = h/x$ وقتی $h \rightarrow 0$ ، $u \rightarrow 0$ پس:

$$f'(x) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{xu} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u}.$$

با استفاده از حد معروف $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

■

۷.۹.۱ قضیه ۷.۹.۱ (مشتق توابع مثلثاتی)

الف) $(\sin x)' = \cos x$

ب) $(\cos x)' = -\sin x$

اثبات الف:

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}.$$

با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right].$$

با استفاده از حدهای معروف $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$

$$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

■

اثبات ب: مشابه با اتحاد $\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$. ■

۸.۹.۱ قضیه ۸.۹.۱ (مشتق توابع مثلثاتی معکوس)

الف) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ برای $|x| < 1$.

ب) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

اثبات الف: قرار دهید $y = \arcsin x$ ، پس $x = \sin y$. طبق قضیه ۱.۸.۱:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

چون $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ ، $\cos y > 0$ و $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. پس:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

■

اثبات ب: قرار دهید $y = \arctan x$ ، پس $x = \tan y$. طبق قضیه ۱.۸.۱:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \cos^2 y.$$

چون $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$ ، پس:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

■

۱۰.۱ مشتق‌های مرتبه بالاتر

۱.۱۰.۱ تعریف ۱.۱۰.۱

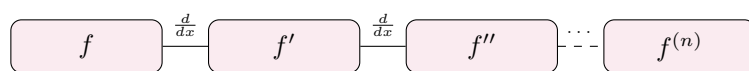
اگر f مشتق‌پذیر باشد و f' نیز مشتق‌پذیر باشد، مشتق f' را **مشتق دوم** f می‌نامیم و با f'' یا $\frac{d^2 f}{dx^2}$ نشان می‌دهیم:

$$f''(x) = (f')'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

به طور مشابه، مشتق n ام f را با $f^{(n)}$ نشان می‌دهیم و به صورت بازگشتی تعریف می‌کنیم:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x).$$

با قرارداد $f^{(0)} = f$. شکل ۱۰.۱ این توالی بازگشتی را نشان می‌دهد.



اول مرتبه

دوم مرتبه

n مرتبه

شکل ۱۰.۱: توالی مشتق‌های مرتبه بالاتر با تعریف بازگشتی $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

۲.۱۰.۱ مثال ۲.۱۰.۱

$$\bullet f(x) = x^3 : f' = 3x^2, f'' = 6x, f''' = 6, f^{(4)} = 0.$$

$$\bullet f(x) = e^x : f^{(n)}(x) = e^x \text{ برای همه } n.$$

$$\bullet f(x) = \sin x : f' = \cos x, f'' = -\sin x, f''' = -\cos x, f^{(4)} = \sin x.$$

۳.۱۰.۱ قضیه ۳.۱۰.۱ (قاعده لایب‌نیتس)

بیان: اگر f و g دارای n مشتق باشند، آنگاه:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

اثبات: با استقرا روی n .

$$\bullet \text{ پایه } n=0 : f^{(0)} g^{(0)} = fg = (fg)^{(0)}.$$

$$\bullet \text{ پایه } n=1 : f^{(1)} g^{(0)} + f^{(0)} g^{(1)} = (fg)' = f'g + fg'.$$

گام استقرا: فرض کنید حکم برای n برقرار است. نشان می‌دهیم برای $n+1$:

$$(fg)^{(n+1)} = \left[(fg)^{(n)} \right]' = \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \right]'$$

با مشتق‌گیری:

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)} \right].$$

با تغییر اندیس در جمله اول $(k \rightarrow k-1)$:

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.$$

با ترکیب:

$$= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(0)} g^{(n+1)}.$$

با اتحاد پاسکال $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$:

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.$$

■

۱۱.۱ قضیه رول

۱.۱۱.۱ قضیه ۱.۱۱.۱ (فرما)

بیان: اگر f روی بازه باز (a, b) تعریف شده باشد و در $c \in (a, b)$ به ماکسیمم یا مینیمم نسبی برسد و در c مشتق پذیر باشد، آنگاه $f'(c) = 0$.

اثبات:

فرض کنید c نقطه ماکسیمم نسبی باشد. پس عدد $\delta > 0$ وجود دارد که برای هر $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap (a, b)$

$$f(x) \leq f(c).$$

حالت $h > 0$: برای $0 < h < \delta$:

$$f(c+h) \leq f(c) \implies f(c+h) - f(c) \leq 0 \implies \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

طبق قضیه حد و نامساوی:

$$f'_+(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

حالت $h < 0$: برای $-\delta < h < 0$ ، $c+h < c$ و $f(c+h) \leq f(c)$ ، پس $f(c+h) - f(c) \leq 0$ اما $h < 0$.

پس:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

طبق قضیه حد و نامساوی:

$$f'_-(c) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

نتیجه: چون f در c مشتق پذیر است، $f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c)$. از یک طرف $f'(c) \leq 0$ و از طرف دیگر $f'(c) \geq 0$.

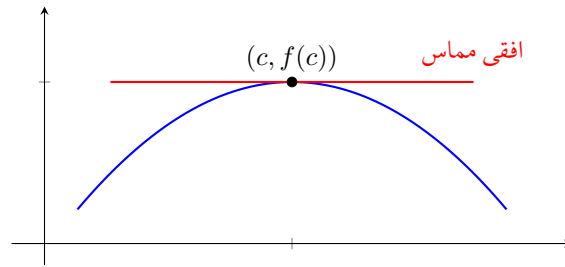
پس $f'(c) = 0$.

حالت مینیمم نسبی مشابه است (با عکس کردن جهت نامساوی ها). ■

شکل ۱۱.۱ این وضعیت را به صورت هندسی نشان می دهد.

۲.۱۱.۱ قضیه ۲.۱۱.۱ (رول)

بیان: اگر $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دارای شرایط زیر باشد:



شکل ۱.۱.۱: قضیه فرما: در نقطه اکسترمم نسبی داخلی که f در آن مشتق پذیر است، مماس افقی است و $f'(c) = 0$.

۱. f روی $[a, b]$ پیوسته باشد.

۲. f روی (a, b) مشتق پذیر باشد.

۳. $f(a) = f(b)$.

آنگاه نقطه‌ای $c \in (a, b)$ وجود دارد که $f'(c) = 0$.

اثبات:

چون f روی $[a, b]$ پیوسته است، طبق قضیه مقادیر کراندار (Extreme Value Theorem)، f به ماکسیمم مطلق M و مینیمم مطلق m روی $[a, b]$ می‌رسد. یعنی نقاط $x_M, x_m \in [a, b]$ وجود دارند که:

$$f(x_M) = M = \max_{[a,b]} f, \quad f(x_m) = m = \min_{[a,b]} f.$$

حالت ۱: $M = m$

در این حالت f روی $[a, b]$ ثابت است (چون مینیمم و ماکسیمم برابرند). پس برای هر $x \in (a, b)$ ، $f'(x) = 0$. هر $c \in (a, b)$ انتخاب کنید.

حالت ۲: $M > m$

در این حالت، حداقل یکی از دو مقدار M یا m با $f(a) = f(b)$ متفاوت است. فرض کنید $M > f(a)$ (حالت مشابه برای $m < f(a)$). چون $f(x_M) = M > f(a) = f(b)$ ، نقطه x_M نمی‌تواند a یا b باشد. پس $x_M \in (a, b)$. چون x_M نقطه ماکسیمم مطلق (و در نتیجه نسبی) داخلی است و f در x_M مشتق پذیر است، طبق قضیه فرما (۱.۱۱.۱):

$$f'(x_M) = 0.$$

قرار دهید $c = x_M$. ■

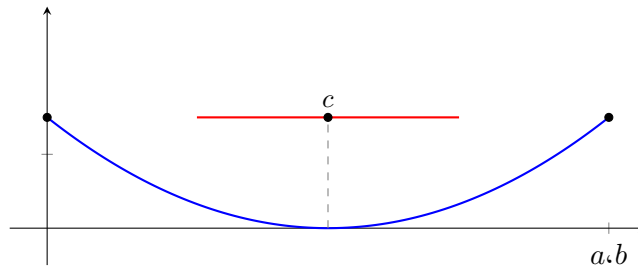
تفسیر هندسی قضیه رول در شکل ۱۲.۱ و ضرورت هر سه شرط آن در شکل ۱۳.۱ نشان داده شده است.

۳.۱۱.۱ بحث تفصیلی روی قضیه رول

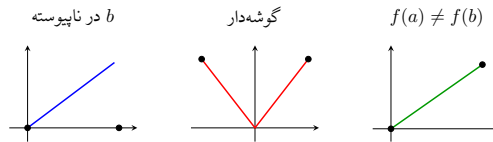
۱. آیا هر سه شرط لازمند؟

بله. برای هر شرط، مثال نقض می‌آوریم:

- بدون پیوستگی روی $f(x) = x$: $[a, b]$ روی $(0, 1)$ و $f(1) = 0 = f(0)$ داریم. ولی f در هیچ نقطه‌ای مشتق صفر ندارد.



شکل ۱۲.۱: قضیه رول: اگر $f(a) = f(b)$ و شرایط پیوستگی/مشتق پذیری برقرار باشد، نقطه‌ای چون c با مماس افقی وجود دارد.



شکل ۱۳.۱: هر سه شرط قضیه رول لازم‌اند: با حذف هر یک، نتیجه (وجود c با $f'(c) = 0$) نقض می‌شود.

• بدون مشتق پذیری روی (a, b) : $f(x) = |x|$ روی $[-1, 1]$. داریم $f(-1) = f(1) = 1$ ولی $f'(0)$ وجود ندارد و در هیچ نقطه دیگری $f' = 0$ نیست.

• بدون $f(a) = f(b)$: $f(x) = x$ روی $[0, 1]$. $f(0) \neq f(1)$ و $f'(0) = 1 \neq 0$ در همه جا.

۲. آیا c یکتاست؟

خیر. مثال: $f(x) = \sin x$ روی $[0, 2\pi]$. $f(0) = f(2\pi) = 0$. مشتق $f'(x) = \cos x$ در $x = \pi/2$ و $x = 3\pi/2$ صفر می‌شود. پس دو نقطه c وجود دارد.

۳. تفسیر هندسی.

قضیه رول می‌گوید: اگر منحنی از نقطه $(a, f(a))$ شروع و به نقطه $(b, f(b))$ با همان ارتفاع ختم شود، و منحنی پیوسته و «صاف» (مشتق پذیر) باشد، آنگاه حداقل یک نقطه روی منحنی وجود دارد که خط مماس در آن افقی است.

۱۲.۱ قضیه مقدار میانگین (لاگرانژ)

۱.۱۲.۱ قضیه ۱.۱۲.۱ (مقدار میانگین)

بیان: اگر $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دارای شرایط زیر باشد:

۱. f روی $[a, b]$ پیوسته باشد.

۲. f روی (a, b) مشتق پذیر باشد.

آنگاه نقطه‌ای $c \in (a, b)$ وجود دارد که:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

اثبات:

تابع کمکی $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

گام ۱: بررسی شرایط رول برای g .

- پیوستگی روی $[a, b]$: g جمع f (پیوسته) و یک تابع خطی (پیوسته) است. پس پیوسته است.
- مشتق‌پذیری روی (a, b) : مشابه، g جمع f (مشتق‌پذیر) و خطی (مشتق‌پذیر) است. مشتق:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- مقادیر در نقاط انتهایی:

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 0 = 0.$$

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0.$$

پس $g(a) = g(b) = 0$.

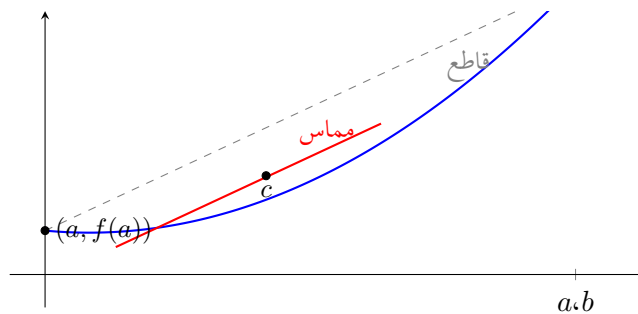
گام ۲: اعمال قضیه رول.

طبق قضیه ۲.۱۱.۱، نقطه‌ای $c \in (a, b)$ وجود دارد که $g'(c) = 0$ یعنی:

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \implies f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

تفسیر هندسی این قضیه در شکل ۱۴.۱ آمده است.



شکل ۱۴.۱: قضیه مقدار میانگین: نقطه‌ای چون c وجود دارد که مماس در آن موازی خط قاطع است؛ $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

۲.۱۲.۱ بحث تفصیلی روی قضیه مقدار میانگین

۱. تفسیر هندسی.

نسبت $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ شیب خط قاطع بین دو نقطه $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ است. قضیه MVT می‌گوید: نقطه‌ای c روی منحنی وجود دارد که شیب خط مماس در آن، برابر شیب خط قاطع است.

۲. ارتباط با قضیه رول.

قضیه رول حالت خاصی از MVT است: اگر $f(a) = f(b)$ ، آنگاه $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ و MVT نتیجه می‌دهد $f'(c) = 0$.

۳. آیا شرط پیوستگی روی $[a, b]$ لازم است؟

بله. مثال: $f(x) = 1/x$ روی $[-1, 1]$ پیوسته نیست (در صفر ناپیوسته) و MVT برقرار نیست.

۴. آیا شرط مشتق‌پذیری روی (a, b) لازم است؟

بله. مثال: $f(x) = |x|$ روی $[-1, 1]$. $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = 0$ ، ولی f' در هیچ نقطه‌ای صفر نمی‌شود (در $x \neq 0$ ، $f' = \pm 1$ و در $x = 0$ مشتق وجود ندارد).

۵. آیا c یکتاست؟

خیر. مثال: $f(x) = x^3$ روی $[-1, 1]$. $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = 1$. $f'(x) = 3x^2 = 1 \implies x = \pm 1/\sqrt{3}$. دو نقطه.

۳.۱۲.۱ قضیه ۲.۱۲.۱ (MVT) (کوشی)

بیان: اگر $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته روی $[a, b]$ و مشتق‌پذیر روی (a, b) باشند، و $g'(x) \neq 0$ برای همه $x \in (a, b)$ ، آنگاه $c \in (a, b)$ وجود دارد که:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

اثبات:

گام ۱: نشان می‌دهیم $g(b) \neq g(a)$.

فرض خلاف: $g(b) = g(a)$. آنگاه طبق قضیه رول، نقطه‌ای $\xi \in (a, b)$ با $g'(\xi) = 0$ وجود دارد. این با فرض $g' \neq 0$ تناقض دارد. پس $g(b) \neq g(a)$ و مخرج کسر $\neq 0$.

گام ۲: تابع کمکی.

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

گام ۳: بررسی شرایط رول.

• h پیوسته روی $[a, b]$ و مشتق‌پذیر روی (a, b) .

• $h(a) = 0$.

• $h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(b) - g(a)) = 0$.

گام ۴: اعمال رول.

نقطه‌ای $c \in (a, b)$ با $h'(c) = 0$ اما:

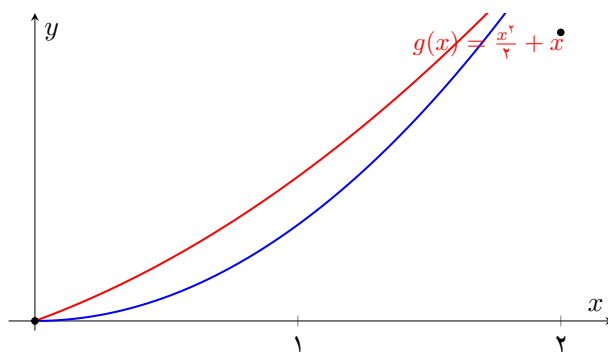
$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x).$$

پس:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) \implies \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

■

شکل ۱۵.۱ تعمیم کوشی را به صورت هندسی نشان می‌دهد.



شکل ۱۵.۱: MVT کوشی: نسبت مشتق‌ها در نقطه c با نسبت تغییرات کل دو تابع برابر است.

۱۳.۱ کاربردهای قضیه مقدار میانگین

۱.۱۳.۱ نتیجه ۱.۱۳.۱ (تابع با مشتق صفر)

بیان: اگر f روی بازه I مشتق‌پذیر و $f'(x) = 0$ برای همه $x \in I$ ، آنگاه f روی I ثابت است. اثبات:

فرض کنید $x_1, x_2 \in I$ با $x_1 < x_2$. طبق قضیه MVT روی بازه $[x_1, x_2]$ (که f روی آن پیوسته و مشتق‌پذیر است)، نقطه‌ای $c \in (x_1, x_2)$ وجود دارد که:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0.$$

پس $f(x_2) = f(x_1)$. چون x_1, x_2 دلخواه بودند، f روی I ثابت است. ■

۲.۱۳.۱ نتیجه ۲.۱۳.۱ (تفاضل ثابت)

بیان: اگر $f'(x) = g'(x)$ برای همه $x \in I$ ، آنگاه $f(x) = g(x) + C$ برای ثابتی C . اثبات:

تابع $h = f - g$ را تعریف کنید. آنگاه $h' = f' - g' = 0$ روی I . طبق نتیجه ۱.۱۳.۱، h ثابت است. پس $f - g = C$. ■

۳.۱۳.۱ قضیه ۳.۱۳.۱ (تست یکنوایی)

بیان: فرض کنید f روی $[a, b]$ پیوسته و روی (a, b) مشتق‌پذیر باشد.

۱. اگر $f'(x) > 0$ برای همه $x \in (a, b)$ ، آنگاه f اکیداً صعودی روی $[a, b]$ است.

۲. اگر $f'(x) < 0$ برای همه $x \in (a, b)$ ، آنگاه f اکیداً نزولی روی $[a, b]$ است.

۳. اگر $f'(x) \geq 0$ برای همه $x \in (a, b)$ ، آنگاه f صعودی (نه لزوماً اکید) روی $[a, b]$ است.

اثبات (۱):

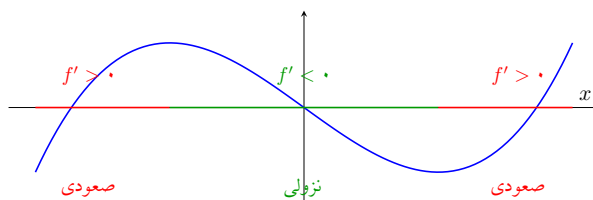
فرض کنید $x_1 < x_2$ در $[a, b]$. طبق MVT، $c \in (x_1, x_2)$ وجود دارد که:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

چون $f'(c) > 0$ و $x_2 - x_1 > 0$ ، حاصل ضرب مثبت است. پس $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ، یعنی $f(x_2) > f(x_1)$. (۲) مشابه.

(۳) مشابه با $\geq$. ■

شکل ۱۶.۱ ارتباط علامت مشتق و رفتار صعودی/نزولی را نشان می‌دهد.



شکل ۱۶.۱: تست یکنوایی: علامت f' روی هر بازه، رفتار صعودی/نزولی f را تعیین می‌کند.

۴.۱۳.۱ قضیه ۴.۱۳.۱ (یکتایی ریشه)

بیان: اگر f روی بازه I مشتق‌پذیر و $f'(x) > 0$ برای همه $x \in I$ ، آنگاه معادله $f(x) = 0$ حداکثر یک ریشه در I دارد.

اثبات:

فرض خلاف: دو ریشه $a < b$ در I وجود دارد: $f(a) = f(b) = 0$. طبق قضیه رول، $c \in (a, b)$ با $f'(c) = 0$ وجود دارد. این با $f' > 0$ تناقض دارد. ■

۵.۱۳.۱ قضیه ۵.۱۳.۱ (نامساوی‌ها از MVT)

(الف) برای $0 < a < b$: $\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$.

(ب) برای $x > 0$: $e^x > 1 + x$.

(ج) برای $x > 0$: $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

(د) برای همه x, y : $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

(ه) برای همه x, y : $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$.

اثبات الف:

تابع $f(t) = \ln t$ روی $[a, b]$ پیوسته و روی (a, b) مشتق‌پذیر است. طبق MVT، $c \in (a, b)$ وجود دارد که:

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{1}{c} \implies \ln \frac{b}{a} = \frac{b - a}{c}.$$

چون $a < c < b$ ، داریم $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$. ضرب در $b - a > 0$:

$$\frac{b-a}{b} < \frac{b-a}{c} < \frac{b-a}{a} \implies \frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

■

اثبات ب:

تابع $f(t) = e^t$ روی $[0, x]$ با $x > 0$ طبق MVT، $c \in (0, x)$ وجود دارد که:

$$\frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^c \implies e^x - 1 = xe^c.$$

چون $c > 0$ ، $e^c > 1$ پس $e^x - 1 = xe^c > x$ یعنی $e^x > 1 + x$. ■

اثبات ج:

تابع $f(t) = \ln(1+t)$ روی $[0, x]$ با $x > 0$ طبق MVT، $c \in (0, x)$ وجود دارد که:

$$\frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x - 0} = \frac{1}{1+c} \implies \ln(1+x) = \frac{x}{1+c}.$$

چون $0 < c < x$ داریم $1 < 1+c < 1+x$ ، پس $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1$ ضرب در $x > 0$:

$$\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+c} < x \implies \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

■

اثبات د:

تابع $f(t) = \sin t$ روی بازه بین x و y طبق MVT، c بین آنها با:

$$\frac{\sin y - \sin x}{y - x} = \cos c.$$

پس:

$$|\sin y - \sin x| = |y - x| \cdot |\cos c| \leq |y - x|.$$

■

اثبات ه: مشابه با $f(t) = \arctan t$ و $|f'(t)| = \frac{1}{1+t^2} \leq 1$. ■

شکل ۱۷.۱ تفسیر هندسی نامساوی (الف) را نشان می‌دهد.

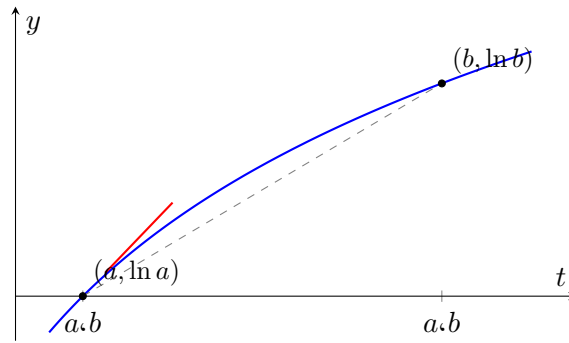
۱۴.۱ قضیه داربو (خاصیت مقدار میانی مشتق)

۱.۱۴.۱ قضیه ۱.۱۴.۱ (داربو)

بیان: اگر f روی بازه I مشتق‌پذیر باشد و $a, b \in I$ با $a < b$ ، آنگاه برای هر λ بین $f'(a)$ و $f'(b)$ ، نقطه‌ای $c \in (a, b)$ وجود دارد که $f'(c) = \lambda$.

اثبات:

حالت ۱: $f'(a) < \lambda < f'(b)$.



شکل ۱۷.۱: تفسیر هندسی نامساوی $\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$: مماس در نقطه میانی، بین شیب‌های دو سر بازه محصور است.

تابع کمکی $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ را تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = f(x) - \lambda x.$$

آنگاه:

$$g'(x) = f'(x) - \lambda.$$

پس:

$$g'(a) = f'(a) - \lambda < 0, \quad g'(b) = f'(b) - \lambda > 0.$$

گام ۱: a نمی‌تواند مینیمم مطلق g روی $[a, b]$ باشد.

چون $g'(a) < 0$ ، طبق تعریف مشتق:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = g'(a) < 0.$$

پس برای $h > 0$ به قدر کافی کوچک، $\frac{g(a+h) - g(a)}{h} < 0$ ، یعنی $g(a+h) < g(a)$. پس مقداری در سمت راست a وجود دارد که g در آن کوچک‌تر از $g(a)$ است. پس a مینیمم مطلق نیست.

گام ۲: b نمی‌تواند مینیمم مطلق g روی $[a, b]$ باشد.

چون $g'(b) > 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(b+h) - g(b)}{h} = g'(b) > 0.$$

برای $h < 0$ به قدر کافی نزدیک به صفر، $h < 0$ و $\frac{g(b+h) - g(b)}{h} > 0$ ، پس $g(b+h) - g(b) < 0$ (چون تقسیم بر منفی، جهت نامساوی را عکس می‌کند). یعنی $g(b+h) < g(b)$. پس مقداری در سمت چپ b وجود دارد که g در آن کوچک‌تر از $g(b)$ است. پس b مینیمم مطلق نیست.

گام ۳: وجود مینیمم داخلی.

چون g روی $[a, b]$ پیوسته است، طبق قضیه مقادیر کراندار، g به مینیمم مطلق خود در نقطه‌ای مانند $c \in [a, b]$ می‌رسد.

طبق گام‌های ۱ و ۲، $c \neq a$ و $c \neq b$. پس $c \in (a, b)$.

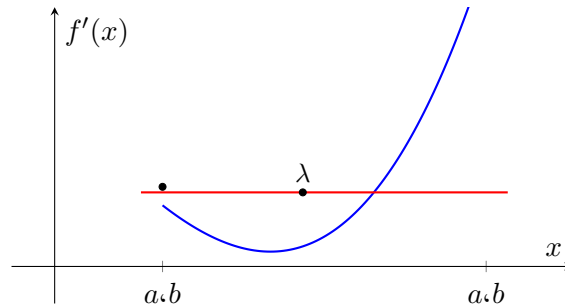
گام ۴: اعمال قضیه فرما.

چون c نقطه مینیمم داخلی است و g در c مشتق‌پذیر است، طبق قضیه فرما (۱.۱۱.۱):

$$g'(c) = 0 \implies f'(c) - \lambda = 0 \implies f'(c) = \lambda.$$

حالت ۲: $f'(a) > \lambda > f'(b)$.

مشابه با در نظر گرفتن $g(x) = \lambda x - f(x)$ یا با اعمال حالت ۱ روی $-f$. ■
شکل ۱۸.۱ این قضیه را به صورت بصری نشان می‌دهد.



شکل ۱۸.۱: قضیه داربو: مشتق هر مقدار بین $f'(a)$ و $f'(b)$ را اختیار می‌کند، هرچند f' ممکن است پیوسته نباشد.

۲.۱۴.۱ نتیجه ۲.۱۴.۱ (علامت ثابت مشتق)

بیان: اگر f روی بازه I مشتق‌پذیر و $f'(x) \neq 0$ برای همه $x \in I$ ، آنگاه f' علامت ثابت دارد (یا همه‌جا مثبت، یا همه‌جا منفی).

اثبات:

فرض خلاف: f' علامت ثابت ندارد. پس $x_1, x_2 \in I$ وجود دارند که $f'(x_1) < 0$ و $f'(x_2) > 0$. بدون کاستی کلی، فرض کنید $x_1 < x_2$. طبق قضیه داربو با $\lambda = 0$ (که بین $f'(x_1)$ و $f'(x_2)$ است)، نقطه‌ای $c \in (x_1, x_2)$ وجود دارد که $f'(c) = 0$. این با فرض $f' \neq 0$ تناقض دارد. ■

۳.۱۴.۱ نتیجه ۳.۱۴.۱ (عدم پرش مشتق)

بیان: مشتق یک تابع مشتق‌پذیر نمی‌تواند ناپیوستگی پرشی داشته باشد.

اثبات:

فرض خلاف: f' در x ناپیوستگی پرشی دارد. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x^-} f'(x) = L_1, \quad \lim_{x \rightarrow x^+} f'(x) = L_2, \quad L_1 \neq L_2.$$

بدون کاستی کلی، فرض کنید $L_1 < L_2$. عدد λ را با $L_1 < \lambda < L_2$ انتخاب کنید. برای x نزدیک به x از چپ، $f'(x) < \lambda$ و برای x نزدیک به x از راست، $f'(x) > \lambda$. طبق قضیه داربو، برای هر جفت نقطه $x_1 < x_2$ (به قدر کافی نزدیک)، نقطه‌ای c بین x_1 و x_2 با $f'(c) = \lambda$ وجود دارد. اما این c باید در همسایگی x باشد. اگر $c < x$ ، آنگاه $f'(c) < \lambda$ (چون در سمت چپ x ، $f' < \lambda$)، تناقض. اگر $c > x$ ، آنگاه $f'(c) > \lambda$ (چون در سمت راست x ، $f' > \lambda$)، تناقض.

$(f' > \lambda)$ ، تناقض. اگر $c = x$ ، ممکن است $f'(x) = \lambda$ ، اما این فقط برای یک λ خاص ممکن است، نه برای همه λ بین L_1 و L_2 . پس تناقض. ■

۴.۱۴.۱ مثال ۴.۱۴.۱ (تابع با مشتق ناپیوسته)

تابع $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ برای $x \neq 0$ و $f(0) = 0$ دیدیم که $f'(0) = 0$ و برای $x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

مشتق f' در صفر ناپیوسته است (چون $\cos(1/x)$ نوسان می‌کند). اما این ناپیوستگی از نوع اساسی (نوسانی) است، نه پرشی. این با نتیجه ۳.۱۴.۱ سازگار است.

۱۵.۱ قاعده هوییتال

۱.۱۵.۱ قضیه ۱.۱۵.۱ (هوییتال — فرم $\frac{0}{0}$)

بیان: فرض کنید f, g روی بازه‌ای حاوی x_0 (به جز احتمالاً خود x_0) مشتق‌پذیر باشند، $g'(x) \neq 0$ در همسایگی x_0 ، و:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (که L می‌تواند حقیقی، $+\infty$ یا $-\infty$ باشد)، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

اثبات (حالت L متناهی):

گام ۱: گسترش f و g به x_0 .

چون $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ، تابع f را با $f(x_0) = 0$ گسترش می‌دهیم. این گسترش پیوسته است. مشابه برای g با $g(x_0) = 0$.

گام ۲: آماده‌سازی.

فرض کنید $\varepsilon > 0$. چون $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ، عدد $\delta > 0$ وجود دارد که برای $0 < |x - x_0| < \delta$:

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon.$$

گام ۳: اعمال قضیه کوشی.

برای x با $0 < |x - x_0| < \delta$ ، بازه بین x_0 و x را در نظر بگیرید. توابع f و g روی این بازه پیوسته و روی داخل آن مشتق‌پذیرند. طبق قضیه کوشی (۲.۱۲.۱)، نقطه‌ای c بین x_0 و x وجود دارد که:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

چون $f(x_0) = g(x_0) = 0$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

گام ۴: نتیجه.

چون c بین x_0 و x است و $|x - x_0| < \delta$ داریم $|c - x_0| < \delta$. پس:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| < \varepsilon.$$

پس $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. ■

۲.۱۵.۱ قضیه ۲.۱۵.۱ (هوپیتال — فرم $\frac{\infty}{\infty}$)

بیان: با شرایط مشابه، اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.
اثبات (حالت L متناهی، $x \rightarrow x_0^+$):

فرض کنید $\varepsilon > 0$. عدد $\eta > 0$ با $\eta < \varepsilon/2$ انتخاب کنید. چون $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ، عدد $\delta_1 > 0$ وجود دارد که برای $x_0 < x < x_0 + \delta_1$:

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \eta.$$

گام ۱: انتخاب a .

عدد $a \in (x_0, x_0 + \delta_1)$ را ثابت انتخاب کنید.

گام ۲: انتخاب δ_2 .

چون $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = \infty$ ، عدد $\delta_2 > 0$ وجود دارد که برای $x_0 < x < x_0 + \delta_2$:

$$g(x) > g(a), \quad g(x) > 0.$$

گام ۳: اعمال قضیه کوشی.

فرض کنید $x_0 < x < \min(x_0 + \delta_1, x_0 + \delta_2)$. طبق قضیه کوشی روی $[a, x]$ ، نقطه‌ای $c \in (a, x)$ وجود دارد که:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

چون $c \in (a, x) \subset (x_0, x_0 + \delta_1)$ داریم:

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - L \right| < \eta.$$

گام ۴: تجزیه.

می‌نویسیم:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \frac{f(x) - f(a)}{g(x)} + \frac{f(a)}{g(x)} - L.$$

با تنظیم:

$$= \frac{g(x) - g(a)}{g(x)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} + \frac{f(a)}{g(x)} - L.$$

با افزودن و کاستن $L \cdot \frac{g(x) - g(a)}{g(x)}$:

$$= \frac{g(x) - g(a)}{g(x)} \left[\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - L \right] + L \cdot \frac{g(x) - g(a)}{g(x)} + \frac{f(a)}{g(x)} - L.$$

ساده‌سازی:

$$= \frac{g(x) - g(a)}{g(x)} \left[\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - L \right] - L \cdot \frac{g(a)}{g(x)} + \frac{f(a)}{g(x)}.$$

گام ۵: کران‌گذاری.

جمله اول:

$$\left| \frac{g(x) - g(a)}{g(x)} \right| \leq 1$$

(چون $0 < g(x) < g(a)$ پس $0 < \frac{g(x) - g(a)}{g(x)} < 1$). پس اندازه جمله اول $< \eta$.
جمله دوم و سوم: چون $g(x) \rightarrow \infty$ وقتی $x \rightarrow x^+$ ، برای x به قدر کافی نزدیک x :

$$\left| -L \cdot \frac{g(a)}{g(x)} + \frac{f(a)}{g(x)} \right| \leq \frac{|L| \cdot |g(a)| + |f(a)|}{g(x)} < \eta.$$

گام ۶: نتیجه.

پس برای x به قدر کافی نزدیک x :

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \eta + \eta = 2\eta < \varepsilon.$$

پس $\lim_{x \rightarrow x^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. حالت $x \rightarrow x^-$ و $x \rightarrow \pm\infty$ مشابه. ■

۳.۱۵.۱ بحث تفصیلی روی قاعده هوییتال

۱. فرم‌های نامعین.

قاعده هوییتال برای هفت فرم نامعین کاربرد دارد:

$$\frac{0}{0} \bullet$$

$$\frac{\infty}{\infty} \bullet$$

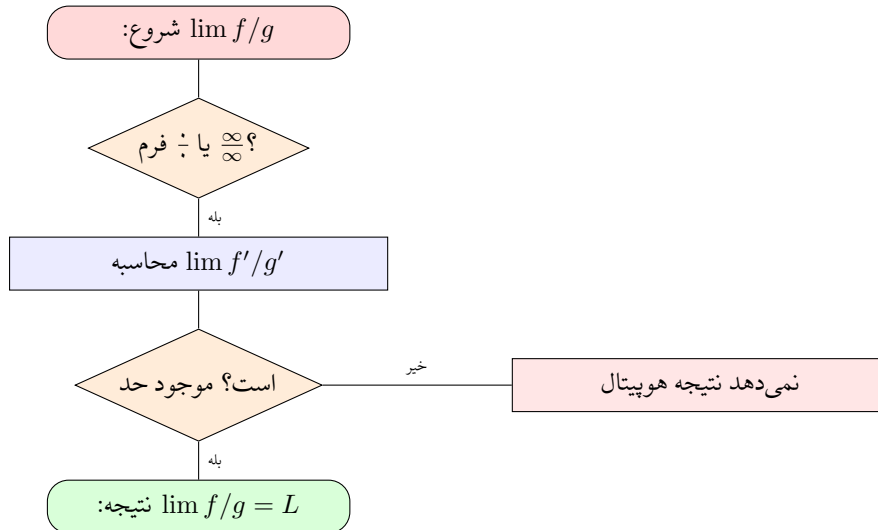
$$0 \cdot \infty \bullet$$

$$\infty - \infty \bullet$$

$$0 \cdot \bullet$$

• 1^∞ • ∞^0

برای فرم‌های $\infty - \infty$ ، $0 \cdot \infty$ ، و فرم‌های توانی، ابتدا با تبدیل جبری یا لگاریتم، مسئله را به $\frac{\infty}{\infty}$ یا $\frac{0}{0}$ تبدیل می‌کنیم. شکل ۱۹.۱ فلوجارت تصمیم‌گیری برای استفاده از این قاعده را نشان می‌دهد.



شکل ۱۹.۱: فلوجارت قاعده هوپیتال: ابتدا بررسی فرم نامعین، سپس محاسبه حد نسبت مشتق‌ها.

۲. شرایط استفاده.

- ابتدا باید مطمئن شویم فرم نامعین است. اگر $\lim f = 1$ و $\lim g = 0$ ، آنگاه $\lim \frac{f}{g} = \infty$ و هوپیتال لازم نیست.
- باید $g'(x) \neq 0$ در همسایگی x (به جز احتمالاً x).
- باید $\lim \frac{f'}{g'}$ موجود باشد (یا $\pm\infty$). اگر این حد موجود نباشد، هوپیتال نتیجه‌ای نمی‌دهد (نه اینکه حد وجود ندارد).

۳. دام‌های رایج.

- استفاده از هوپیتال بدون بررسی فرم نامعین.
- استفاده مکرر بدون بررسی شرایط.
- فراموش کردن اینکه مشتق صورت و مخرج جداگانه گرفته می‌شود، نه مشتق کسر.

۴. مثال‌هایی که هوپیتال در آن‌ها شکست می‌خورد.

مثال الف: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$.

این حد $\frac{\infty}{\infty}$ است. اگر هوپیتال بزنیم:

$$\frac{1 + \cos x}{1}.$$

این حد وجود ندارد (چون $\cos x$ نوسان می‌کند). اما حد اصلی وجود دارد:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1.$$

پس هوییتال در اینجا نتیجه نمی‌دهد، هرچند حد اصلی موجود است.

مثال ب: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{x}$.

این حد $\div$ است. هوییتال:

$$\frac{2x \sin(1/x) - \cos(1/x)}{1}.$$

این حد وجود ندارد. اما حد اصلی:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0.$$

پس هوییتال نتیجه نمی‌دهد.

۱۶.۱ قضیه تیلور

۱.۱۶.۱ قضیه ۱.۱۶.۱ (تیلور با باقیمانده لاگرانژ)

بیان: فرض کنید f روی بازه‌ای حاوی x_0 دارای $n+1$ مشتق پیوسته باشد. برای هر x در این بازه، نقطه‌ای c بین x_0 و x وجود دارد که:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

اثبات:

فرض کنید $x \neq x_0$. ثابت M را طوری تعریف می‌کنیم که:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + M(x - x_0)^{n+1}.$$

یعنی:

$$M = \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}{(x - x_0)^{n+1}}.$$

تابع کمکی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$g(t) = f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (t - x_0)^k - M(t - x_0)^{n+1}.$$

گام ۱: بررسی مقادیر g در x_0 و x .

• $g(x_0) = 0$ طبق تعریف M .

• $g(x) = f(x) - f(x_0) - 0 = 0$ چون $P_n(x_0) = f(x_0)$ و $0 = f(x_0) - f(x_0) = 0$.

گام ۲: بررسی مشتقات g در x_0 .برای $k = 0, 1, \dots, n$:

$$g^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - P_n^{(k)}(x_0) - M \cdot \frac{d^k}{dt^k}(t - x_0)^{n+1} \Big|_{t=x_0}.$$

چندجمله‌ای تیلور P_n به گونه‌ای ساخته شده که $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ برای $k = 0, 1, \dots, n$. همچنین مشتق k ام $(t - x_0)^{n+1}$ برای $k \leq n$ برابر است با:

$$\frac{d^k}{dt^k}(t - x_0)^{n+1} = (n+1)n(n-1)\cdots(n-k+2)(t - x_0)^{n+1-k}.$$

این عبارت در $t = x_0$ برابر صفر است (چون $n+1-k \geq 1$). پس:

$$g^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

گام ۳: اعمال مکرر قضیه رول.

$$\bullet \quad g(x_0) = g(x) = 0. \text{ طبق رول, } c_1 \text{ بین } x_0 \text{ و } x \text{ با } g'(c_1) = 0.$$

$$\bullet \quad g'(x_0) = 0 \text{ و } g'(c_1) = 0. \text{ طبق رول, } c_2 \text{ بین } c_1 \text{ و } x_0 \text{ با } g''(c_2) = 0.$$

$$\bullet \quad \text{ادامه می‌دهیم تا } c_{n+1} \text{ بین } c_n \text{ و } x_0 \text{ با } g^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0.$$

قرار دهید $c = c_{n+1}$.گام ۴: محاسبه $g^{(n+1)}$.

مشتق $(n+1)$ ام چندجمله‌ای تیلور P_n (که درجه‌اش $n \leq$ است) برابر صفر است. مشتق $(n+1)$ ام $(t - x_0)^{n+1}$ برابر $(n+1)!$ است. پس:

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - 0 - M(n+1)!.$$

گام ۵: نتیجه.

$$0 = g^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - M(n+1)! \implies M = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

با جایگذاری M در تعریف:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

■

۲.۱۶.۱ قضیه ۲.۱۶.۱ (تیلور با باقیمانده کوشی)

بیان: با شرایط قضیه ۲.۱۶.۱، نقطه‌ای c بین x_0 و x وجود دارد که:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n (x-x_0).$$

اثبات:

دو تابع کمکی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k, \quad G(t) = (x-t)^{n+1}.$$

بررسی می‌کنیم:

$$G(x) = 0, F(x) = f(x) - f(x) = 0. \bullet$$

$$G(x_0) = (x-x_0)^{n+1}, F(x_0) = R_n(x). \bullet$$

$$F \text{ و } G \text{ پیوسته روی } [x_0, x] \text{ و مشتق‌پذیر روی } (x_0, x). \bullet$$

محاسبه $F'(t)$:

$$F'(t) = - \sum_{k=0}^n \frac{d}{dt} \left[\frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k \right].$$

با قاعده حاصل ضرب:

$$= - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left[f^{(k+1)}(t) (x-t)^k - k f^{(k)}(t) (x-t)^{k-1} \right].$$

با بازنویسی:

$$= - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x-t)^{k-1}.$$

با تغییر اندیس در جمله دوم $(k \rightarrow k+1)$:

$$= - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k.$$

جملات $k=0, \dots, n-1$ حذف می‌شوند و فقط جمله $k=n$ باقی می‌ماند:

$$F'(t) = - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n.$$

محاسبه $G'(t)$:

$$G'(t) = -(n+1)(x-t)^n.$$

اعمال قضیه کوشی:

$$\frac{F(x) - F(x_*)}{G(x) - G(x_*)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}$$

برای $c \in (x_*, x)$ با جایگذاری:

$$\frac{0 - R_n(x)}{0 - (x - x_*)^{n+1}} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n}{-(n+1)(x - c)^n}.$$

ساده سازی:

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_*)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!(n+1)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

پس:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_*)^{n+1}.$$

این همان باقیمانده لاگرانژ است. برای به دست آوردن باقیمانده کوشی، از انتخاب متفاوت G استفاده می‌کنیم:

$$G(t) = (x - t).$$

با محاسبه مشابه:

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n, \quad G'(t) = -1.$$

طبق قضیه کوشی:

$$\frac{F(x) - F(x_*)}{G(x) - G(x_*)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \implies \frac{-R_n(x)}{-(x - x_*)} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n}{-1}.$$

ساده سازی:

$$\frac{R_n(x)}{x - x_*} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n \implies R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n(x - x_*).$$

■

۳.۱۶.۱ قضیه ۳.۱۶.۱ (تیلور با باقیمانده انتگرالی)

بیان: اگر f دارای $n+1$ مشتق پیوسته روی بازه حاوی x_* باشد، آنگاه:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_*}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt.$$

اثبات (استقرا):

پایه $n=0$:

$$R_1(x) = f(x) - f(x_*) = \int_{x_*}^x f'(t) dt = \frac{1}{1!} \int_{x_*}^x f'(t)(x-t)^0 dt.$$

طبق قضیه اساسی حساب، درست است.

گام استقرا: فرض کنید حکم برای $n-1$ برقرار است:

$$R_{n-1}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_*}^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt.$$

اما:

$$R_n(x) = R_{n-1}(x) - \frac{f^{(n)}(x_*)}{n!} (x - x_*)^n.$$

با انتگرال گیری جزء به جزء:

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_{x_*}^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt = \left[-\frac{f^{(n)}(t)(x-t)^n}{n!} \right]_{x_*}^x + \frac{1}{n!} \int_{x_*}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

جمله مرزی:

$$\left[-\frac{f^{(n)}(t)(x-t)^n}{n!} \right]_{x_*}^x = 0 + \frac{f^{(n)}(x_*)(x-x_*)^n}{n!}.$$

پس:

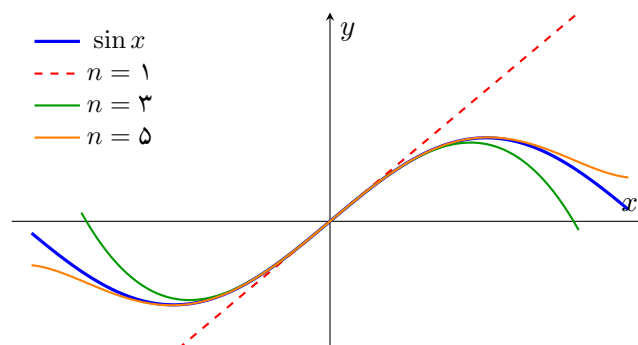
$$R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(x_*)(x-x_*)^n}{n!} + \frac{1}{n!} \int_{x_*}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

بنابراین:

$$R_n(x) = R_{n-1}(x) - \frac{f^{(n)}(x_*)(x-x_*)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \int_{x_*}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

■

سه فرم باقیمانده در شکل ۲۱.۱ مقایسه شده‌اند. شکل ۲۰.۱ تقریب چندجمله‌ای $\sin x$ را نشان می‌دهد.



شکل ۲۰.۱: تقریب تیلور $\sin x$ با چندجمله‌ای‌های درجه ۱، ۳ و ۵: با افزایش درجه، تقریب در بازه وسیع‌تری دقیق می‌شود.

نوع	فرمول	ویژگی
لاگرانژ	$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$	نقطه c بین x_0 و x ؛ مناسب کران‌گذاری
کوشی	$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - x_0)^n$	همان c اما فرم متفاوت؛ مفید در برخی اثبات‌ها
انتگرالی	$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x - t)^n dt$	نیازی به یافتن c ندارد؛ نیازمند $f^{(n+1)}$ پیوسته

شکل ۲۱.۱: مقایسه سه فرم باقیمانده تیلور از نظر فرمول و کاربرد.

۴.۱۶.۱ قضیه ۴.۱۶.۱ (بسط‌های مهم تیلور)

الف) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ برای همه $x \in \mathbb{R}$

اثبات: باقیمانده لاگرانژ:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \rightarrow 0$$

وقتی $n \rightarrow \infty$ (چون فاکتوریل سریع‌تر از توان رشد می‌کند). ■

ب) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ برای همه x .

اثبات: مشتق‌های $\sin$ به صورت چرخه‌ای $\sin, \cos, -\sin, -\cos, \sin$ تکرار می‌شوند. در $x_0 = 0$:

$$\sin(0) = 0, \quad \sin'(0) = 1, \quad \sin''(0) = 0, \quad \sin'''(0) = -1, \quad \sin^{(4)}(0) = 0, \dots$$

پس فقط مشتق‌های فرد ظاهر می‌شوند:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

باقیمانده به صفر میل می‌کند چون $|\sin^{(n)}(c)| \leq 1$. ■

ج) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ برای همه x .

اثبات: مشابه با $\sin$. ■

د) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ برای $-1 < x \leq 1$.

اثبات: مشتق n ام $\ln(1+x)$ برابر $\frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}$ در $x_0 = 0$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

همگرایی برای $-1 < x \leq 1$ (سری متناوب). برای $x = 1$ ، سری $\sum (-1)^{n+1}/n$ همگرا است (آزمون لایب‌نیتس).

برای $x = -1$ ، سری $\sum (-1)^{2n+1}/n = -\sum 1/n$ واگرا است. ■

ه) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ برای $|x| < 1$.

اثبات: سری هندسی با نسبت x . ■

و $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ برای $|x| < 1$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ ، که:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

اثبات: مشتق n ام $(1+x)^\alpha$ برابر $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ در $x_0 = 0$ ، ضریب $\binom{\alpha}{n}$ است. همگرایی برای $|x| < 1$ (آزمون نسبت). ■
جدول مرجع این بسطها در شکل ۲۲.۱ آمده است.

تابع	بسط مکلورین	بازه همگرایی
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$	$(-1, 1]$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$(-1, 1)$
$(1+x)^\alpha$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$	$(-1, 1)$

شکل ۲۲.۱: جدول مرجع بسطهای مهم تیلور/مکلورین با بازه همگرایی.

۱۷.۱ مشتق توابع برداری

۱.۱۷.۱ تعریف ۱.۱۷.۱

فرض کنید $\mathbf{r}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی برداری باشد، $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$ می‌گوییم $\mathbf{r}$ در t مشتق‌پذیر است اگر حد زیر موجود باشد:

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0)}{h}.$$

۲.۱۷.۱ قضیه ۲.۱۷.۱

بیان: $\mathbf{r}$ در t مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر هر r_i در t مشتق‌پذیر باشد. در این صورت:

$$\mathbf{r}'(t_0) = (r'_1(t_0), \dots, r'_n(t_0)).$$

اثبات: حد برداری موجود است اگر و تنها اگر هر مؤلفه‌اش حد داشته باشد (طبق قضیه حد مؤلفه‌ای). ■

۳.۱۷.۱ قضیه ۳.۱۷.۱ (خواص مشتق برداری)

$$\text{الف) } (\mathbf{r} + \mathbf{s})' = \mathbf{r}' + \mathbf{s}'$$

$$\text{ب) } (c\mathbf{r})' = c\mathbf{r}' \text{ برای } c \in \mathbb{R}$$

$$\text{ج) } (\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})' = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}'$$

$$\text{د) } (\mathbf{r} \times \mathbf{s})' = \mathbf{r}' \times \mathbf{s} + \mathbf{r} \times \mathbf{s}' \text{ (برای } n = 3)$$

$$\text{ه) } (\mathbf{r} \circ \phi)' = \phi' \cdot (\mathbf{r}' \circ \phi) \text{ (قاعده زنجیره‌ای)}$$

اثبات (ج):

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) \cdot \mathbf{s}(t+h) - \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}(t)}{h}.$$

از اتحاد:

$$\mathbf{r}(t+h) \cdot \mathbf{s}(t+h) - \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}(t) = [\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{s}(t+h) + \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{s}(t+h) - \mathbf{s}(t)].$$

با تقسیم بر h و حد گرفتن (مشابه قاعده حاصل ضرب اسکالر):

$$= \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{s}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}'(t).$$

■

۴.۱۷.۱ قضیه ۴.۱۷.۱ (MVT برداری)

بیان: اگر $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ پیوسته روی $[a, b]$ و مشتق‌پذیر روی (a, b) باشد، آنگاه:

$$\|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)\| \leq \sup_{t \in (a, b)} \|\mathbf{r}'(t)\| \cdot (b - a).$$

اثبات:

فرض کنید $\mathbf{u} = \mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)$. اگر $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ، فرض کنید $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. تابع اسکالر زیر را تعریف می‌کنیم:

$$g(t) = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}.$$

گام ۱: بررسی شرایط MVT اسکالر.

• g روی $[a, b]$ پیوسته است (ضرب داخلی توابع پیوسته).• g روی (a, b) مشتق‌پذیر است و:

$$g'(t) = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}.$$

گام ۲: اعمال MVT اسکالر.

طبق قضیه ۱.۱۲.۱، $c \in (a, b)$ وجود دارد که:

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b - a).$$

گام ۳: محاسبه.

$$g(b) - g(a) = \mathbf{r}(b) \cdot \mathbf{u} - \mathbf{r}(a) \cdot \mathbf{u} = [\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)] \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2.$$

$$g'(c) = \mathbf{r}'(c) \cdot \mathbf{u}.$$

گام ۴: کران‌گذاری.

طبق نامساوی کوشی-شوارتز:

$$g'(c) = \mathbf{r}'(c) \cdot \mathbf{u} \leq \|\mathbf{r}'(c)\| \cdot \|\mathbf{u}\| \leq \left(\sup_t \|\mathbf{r}'(t)\| \right) \cdot \|\mathbf{u}\|.$$

پس:

$$\|\mathbf{u}\|^2 \leq \left(\sup_t \|\mathbf{r}'(t)\| \right) \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot (b - a).$$

چون $\|\mathbf{u}\| > 0$ ، تقسیم بر $\|\mathbf{u}\|$:

$$\|\mathbf{u}\| \leq \sup_t \|\mathbf{r}'(t)\| \cdot (b - a).$$

■

۵.۱۷.۱ ملاحظه ۵.۱۷.۱ (تفاوت با MVT اسکالر)

MVT برداری به شکل نامساوی است، نه برابری. یعنی لزوماً نقطه‌ای c وجود ندارد که:

$$\mathbf{r}'(c) = \frac{\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)}{b - a}.$$

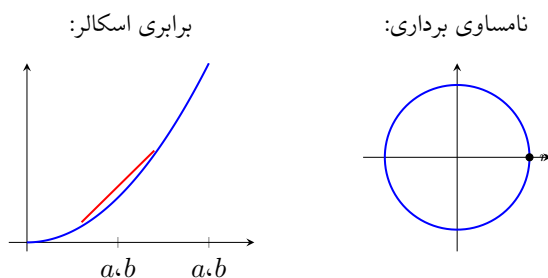
مثال نقض: $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ روی $[0, 2\pi]$. پس بردار سمت راست $\mathbf{r}(2\pi) - \mathbf{r}(0) = (1, 0) - (1, 0) = 0$ است. اما $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شود (طولش همیشه ۱ است). پس هیچ c با $\mathbf{r}'(c) = 0$ وجود ندارد. شکل ۲۳.۱ این تفاوت را نشان می‌دهد.

۱۸.۱ خلاصه فصل

در این فصل، مفاهیم و قضایای زیر را با اثبات کامل بررسی کردیم:

تعاریف:

- مشتق در یک نقطه، تابع مشتق‌پذیر، مشتق یک‌طرفه.



شکل ۲۳.۱: در حالت اسکالر، نقطه c با برابری مشتق و شیب قاطع وجود دارد. در حالت برداری، تنها نامساوی برقرار است؛ دایره واحد نشان می‌دهد r' هرگز صفر نمی‌شود.

- مشتق‌های مرتبه بالاتر.

- مشتق توابع برداری.

قضایا:

- مشتق‌پذیری نتیجه می‌دهد پیوستگی (با مثال نقض برای عکس).

- خواص جبری مشتق: خطی بودن، حاصل ضرب، تقسیم.

- قاعده زنجیره‌ای (با دو اثبات).

- مشتق تابع معکوس.

- مشتق توابع مقدماتی (ثابت، همانی، توان، چندجمله‌ای، نمایی، لگاریتم، مثلثاتی، معکوس مثلثاتی).

- قاعده لایب‌نیتس.

- قضیه فرما.

- قضیه رول (با بحث کامل روی شرایط).

- قضیه مقدار میانگین لاگرانژ.

- قضیه مقدار میانگین کوشی.

- نتیجه‌های MVT: تابع با مشتق صفر، تفاضل ثابت، تست یکنوایی، یکتایی ریشه، نامساوی‌ها.

- قضیه داربو و نتیجه‌های آن (علامت ثابت مشتق، عدم پرش).

- قاعده هوییتال (هر دو فرم با اثبات کامل).

- قضیه تیلور (لاگرانژ، کوشی، و انتگرالی).

- بسط‌های مهم تیلور.

- MVT برداری (با اثبات کامل).

مثال‌ها و کاربردها:

- مثال‌های متعدد از مشتق‌ناپذیری.
- کاربردهای MVT در اثبات نامساوی‌ها.
- کاربردهای MVT در یکتایی ریشه.
- مثال‌های هوپیتال و دام‌های آن.

اشتباهات رایج:

- تصور پیوستگی نتیجه می‌دهد مشتق‌پذیری.
- تصور یکتایی نقطه c در MVT و رول.
- استفاده نادرست از هوپیتال.
- فراموش کردن شرایط قضایا.